

在椭圆抛物柱模型中扁方材和板 材材积精确解析解推导

马 岩 张 宁

(东北林业大学)

摘 要

本文以椭圆抛物柱模型计算了毛边板, 钝棱板, 扁方材等体积的精确解析解。为制材CAD与CAM和下锯图优化提供了精度更高的数学模型。

关键词 椭圆抛物柱; 扁方材

现行原木材积计算的解析解用的是圆柱和圆台模型。这种近似解仅就原木的材积来说误差并不大(-3.5~+12%之间)^[1], 对于现行制材工艺水平是足够的。但随着制材CAD和CAM的发展, 人们已经开始对下锯图进行优化和微机控制^[2, 3]。这样, 使出材率精度大大地提高, 但现在的模型误差大于优化精度, 很难说出材率究竟提高了多少。而且用圆模型优化扁方材形状的结论肯定是正方材(圆中最大面积是正方形)。这 and 实际制材工况不相符合, 因而就要求在进行制材CAD和CAM的优化和出材率计算时有一个精度更高的数学模型。

1. 椭圆抛物柱原木模型的建立

原木的纵断面多为抛物线, 横断面也多为椭圆^[4]。因此, 将原木简化成椭圆抛物柱模型, 可以使理论廓形和实际原木形状更接近, 使模型误差达到最小, 使原木解析数学模型描述又向前推进了一步^[5]。

假设: 原木垂直于直线轴线的断面均为椭圆, 取小头截面上的实测值为 x_1, y_1, z_1 ;

大头截面上 $z_3 = 0$, y_3 为实测值; 其余尺寸为间接导出的理论值; 树径中间轴线为直线, 大小端面垂直于该直线。

则原木的数学模型:

$$\begin{cases} a_1 x^2 + a_2 y^2 \leq a_4 - z \\ a_6 \leq z \leq a_5 \\ a_1 a_2 > 0 \end{cases} \quad (1)$$

其中: a_i 为常数, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

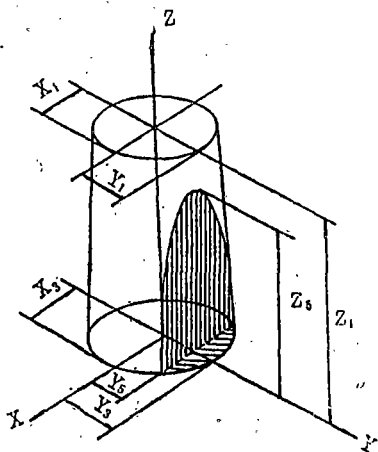


图1 原木与板皮的数学模型示意图

本文于1989年8月23日收到。

本文经王华滨教授审阅, 并承王教授提出宝贵的修改意见, 谨志谢忱。

当 $x_1 = y_1$ 时为现在用的圆台模型:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq \frac{a_4 - z}{a_3} \\ a_6 \leq z \leq a_5 \\ a_3 > 0 \end{cases} \quad (2)$$

其中:

$$\begin{cases} a_6 = z_1 \\ a_6 = z_3 \\ a_3 = a_2 = \frac{z_1}{y_3^2 - y_1^2} \\ a_1 = \frac{a_2 y_3^2 - z_1}{x_1^2} = \frac{z_1 y_1^2}{x_1^2 (y_3^2 - y_1^2)} \\ a_4 = a_2 y_3^2 = \frac{z_1 y_3^2}{y_3^2 - y_1^2} \end{cases} \quad (3)$$

在圆柱坐标下积分(1)式并代入(3)整理可求得:(推导参见[5]文)

$$V = \frac{\pi}{2} x_1 y_1 z_1 \left(1 + \frac{y_3^2}{y_1^2} \right) \quad (4)$$

如果以 x_3, y_3, z_1, y_1 为实测值,则(4)式可以写成:

$$V = \frac{\pi}{2} x_3 y_3 z_1 \left(1 + \frac{y_1^2}{y_3^2} \right) \quad (5)$$

型体中的任意断面周长(原木的胸径)由下列公式表示:

$$C = 2\pi \sqrt{\frac{a_4 - z}{a_1}} \left(1 - \frac{e^2}{4} \right) \quad (6)$$

其中:离心率 $e = \frac{\sqrt{x_1^2 - y_1^2}}{x_1}$ (7)

式中: $x_1 \geq y_1$

当 $z = 0$ 时: $C_3 = \frac{2\pi x_1}{q} \left(1 - \frac{e^2}{4} \right)$ (8)

当 $z = z_1$ 时: $C_1 = 2\pi x_1 \left(1 - \frac{e^2}{4} \right)$ (9)

2. 板材材积的理论解

如果要精确计算出材率就必须知道板皮,毛边板,钝棱板,锯材的体积。这样,扁方材的体积也自然可以求出。

1. 板皮的材积计算

y 向板皮的体积由下列方程组成;

$$\begin{cases} a_1 x^2 + a_2 y^2 \leq a_4 - z \\ y_3 \geq y_5 \geq y_1 \\ y_5 \leq y \leq y_3 \\ z_3 \leq z_6 \leq z_1 \end{cases} \quad (10)$$

由下列方程围成:

$$\begin{cases} a_1 x^2 + a_2 y^2 = a_4 - z \\ z = z_3 \\ y = y_5 \end{cases} \quad (11)$$

积分(10)式可以求出它的体积

$$V_{y_5} = \frac{0.5 V_0 (1 - h_3^2)}{h_2^2 (1 - h_2^2)^2} \left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsinh} h_3 - \frac{h_3 (5 - 2h_3^2) \sqrt{1 - h_3^2}}{3} \right] \quad (12)$$

其中: $V_0 = x_1 y_1 z_1$ (13)

$$h_2 = \frac{y_1}{y_3} \quad (14)$$

$$h_3 = \frac{y_5}{y_3} \quad (15)$$

同理可以求出 x 向板皮的体积:

$$V_{x_5} = \frac{0.5 V_0 (1 - h_1^2)}{h_2^2 (1 - h_2^2)^2} \left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsinh} h_1 - \frac{h_1 (5 - 2h_1^2) \sqrt{1 - h_1^2}}{3} \right] \quad (16)$$

其中: $h_1 = \frac{x_5}{x_3}$ (17)

2. 板皮宽头小板材积的计算

y 向的小板如图2所示,由下列方程围

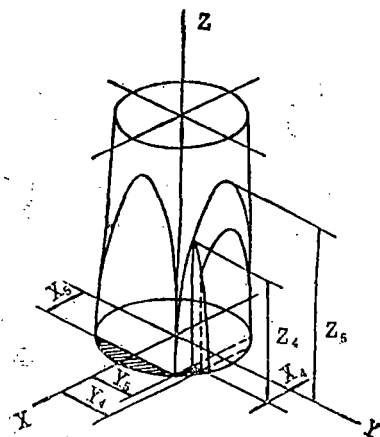


图2 V_{y_3}, V_{y_4} 和 V_{y_5} 的数学模型示意图

成:

$$\begin{cases} a_1 x^2 + a_2 y^2 = a_4 - z \\ z = z_6 \\ y = y_6 \\ y = y_4 \end{cases} \quad (18)$$

在我们的推导中, 不计工艺参数的影响, 认为锯口的厚度为零的理想状态 (若计锯口厚度, 可把它看成一块锯口厚度的板, 并由此求出锯口的损耗)。

令: $V_{y'_5}$ 为 (16) 式中用 y_4 代替 y_6 ; 即 $V_{y'_5} = V_{y_5} (y_5 = y_4)$

则板皮宽头小板的材积:

$$V_{y_4} = V_{y_5} - V_{y'_5} \quad (19)$$

3. 废毛边的材积计算

y 向废毛边 (边条) 的材积是建立平衡表的关键数据。精确计算废品率时也可用到该材积。

它由下列方程围成:

$$\begin{cases} a_1 x^2 + a_2 y^2 = a_4 - z \\ z = z_3 \\ y = y_6 \\ x = x_4 \end{cases} \quad (20)$$

积分上式可以求出:

$$V_{y_3} = \frac{V_0 (1 - h_3^2)}{12 h_1^2 (1 - h_2^2)^2} \left[3 (\operatorname{arcsinh} h_4 - \operatorname{arcsinh} h_3) + h_4 (5 - 2 h_4^2) \sqrt{1 - h_4^2} - h_3 (5 - 2 h_3^2) \sqrt{1 - h_3^2} - h_1 h_4 (h_4 - h_3 x_3 - \frac{h_3^2 h_4}{h_1^2} - h_4^2 - h_3 h_4 - h_3^2) \right] \quad (21)$$

$$\text{其中: } h_4 = \frac{y_4}{y_3} \quad (22)$$

4. 四边形毛边板的材积计算

y 向该板由下列方程表示:

$$\begin{cases} a_1 x^2 + a_2 y^2 \leq a_4 - z \\ y_6 \leq y \leq y_7 \\ -y_1 \leq y_6 < y_7 \leq y_1 \\ z_3 \leq z \leq z_1 \end{cases} \quad (23)$$

在 (23) 式积分时, 我们仍用 (19) 式的基本假设。因为它的体积如图 3 所示, 由下列

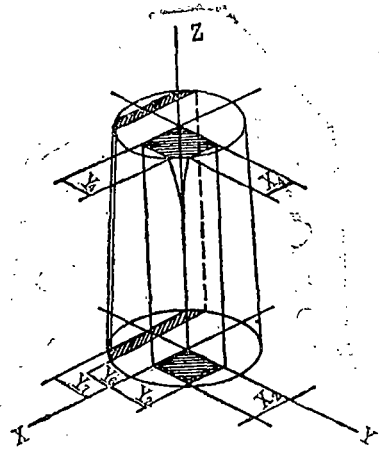


图3 V_{y_6} 和 V_4 的数学模型示意图

方程包络而成:

$$\begin{cases} a_1 x^2 + a_2 y^2 = a_4 - z \\ y = y_6 \\ y = y_7 \\ z = z_3 \\ z = z_1 \end{cases} \quad (24)$$

积分 (23) 式可以求出:

$$V_{y_6} = \frac{0.5 V_0}{h_2^2 (1 - h_2^2)} \left\{ \frac{h_7}{3} (5 - 2 h_7^2) \sqrt{1 - h_7^2} + \operatorname{arcsinh} h_7 - \frac{h_6}{3} (5 - 2 h_6^2) \sqrt{1 - h_6^2} - \operatorname{arcsinh} h_6 - \left[\frac{h_7}{3} (5 h_2^2 - 2 h_7^2) \sqrt{h_2^2 - h_7^2} + h_2^4 \operatorname{arcsin} \frac{h_7}{h_2} - \frac{h_6}{3} (5 h_2^2 - 2 h_6^2) \sqrt{h_2^2 - h_6^2} - h_2^4 \operatorname{arcsin} \frac{h_6}{h_2} \right] \right\} \quad (25)$$

$$\text{其中: } h_7 = \frac{y_7}{y_3} \quad (26)$$

$$h_6 = \frac{y_6}{y_3} \quad (27)$$

5. 扁方材的材积计算

扁方材相当 V_{y_6} 在 $y_7 = -y_6$ 时, 在 x 方向再去掉两个 V_{x_5} 和 V_{x_6} (它们的求取方法和 V_{y_6} 、 V_{y_3} 类似) 再加上四个 V_{y_3} 。所以, 扁方材材积:

$$V_4 = V_{y_6} (y_6 = -y_7) - 2 [V_{x_5} (x_5 = x_1)$$

$$+ V_{x_6} (x_7 = x_1)] + 4V_{y_3} \quad (28)$$

6. 钝棱板的材积计算

y向钝棱板相当 V_{y_6} 在 $x_4 < x_2$ 时, 去掉两个 V_{y_3} 后的材积:

$$V_{y_2} = V_{y_6} (x_4 < x_2) - 2V_{y_3} (x_4 < x_2) \quad (29)$$

7. 锯材和方材的材积计算

锯材和方材的材积用 V_2 表示, 它们是标准矩形, 即 $V_2 = 2x_2y_2z_2$ (30)

3. 举例分析及结论

考虑到本模型是应用在制材CAD和下锯图优化中, 故取毫米为单位。

假设一段圆木小端截面 $x_1 = 190\text{mm}$; $y_1 = 210\text{mm}$; $z_1 = 4000\text{mm}$; 大端截面 $y_3 = 235\text{mm}$, 求它的各项几何参数。由(4)式可求出 $V = 5.6464 \times 10^8 \text{mm}^3$, 当 $y_5 = y_1$ 时, V_{y_5} 为y向最大值, 由(12)式可求出: $V_{y_5} = 5.213 \times 10^8 \text{mm}^3$; 当 $y_7 = 210\text{mm}$, $y_6 = 181\text{mm}$ 时, 由(25)式可以求出 $V_{y_6} = 2.189 \times 10^7 \text{mm}^3$, 当扁方材不计钝棱时, 取 $x_2 = 160\text{mm}$, $y_2 = 181\text{mm}$ 时, 它的估算体积 $V_2 = 4x_2y_2z_2 = 4.634 \times 10^8 \text{mm}^3$, 若用(28)式可

以求出: $V_4 = 4.23 \times 10^8 \text{mm}^3$ 。同理可以求出其它尺寸。

对于现阶段的工艺水平来讲, 这样精确计算意义不大。但如果采用光电检尺技术, 利用(4)式就可以求出木材材积的解析解(实际应用时可将原木分成若干段, 分段用(4)式即可求出更精确的结论)。利用(6)~(9)式可以利用周长换算平均直径, 精度也高于现在的方法。总之, 采用这样的数学模型可以大大提高制材业的计算精度, 为制材优化提供一个新的理论基础。

参考文献

- [1] 北京林业大学, 1987, 测树学, 中国林业出版社。
- [2] 朱建生, 1987, 微机在原木锯割中的应用, 林产工业, No.1.
- [3] 林迎忠, 1986, 用微机计算和显示原木下锯图的研究, 东北林业大学研究生论文。
- [4] 大隅真一, 1977, 森林计测学, 东京贤贤堂。
- [5] 马岩, 1988, 伐倒木树干材积近似求积通解, 东北林业大学学报, No.5.

The analytic results of board volumes in an ellipse-parabola cylinder model

Ma Yan Zhang Ning

(Northeast Forestry University)

Abstract

The mathematics model of the analytic results of volumes on unedged board, wane board and flat square log etc. was deduced from an ellipse-parabola cylinder model. From this result, a more precise mathematics pattern for CAD and CAM as well as the optimum cutting design can be provided.

Keywords Ellipse-parabola cylinder; The flat square log